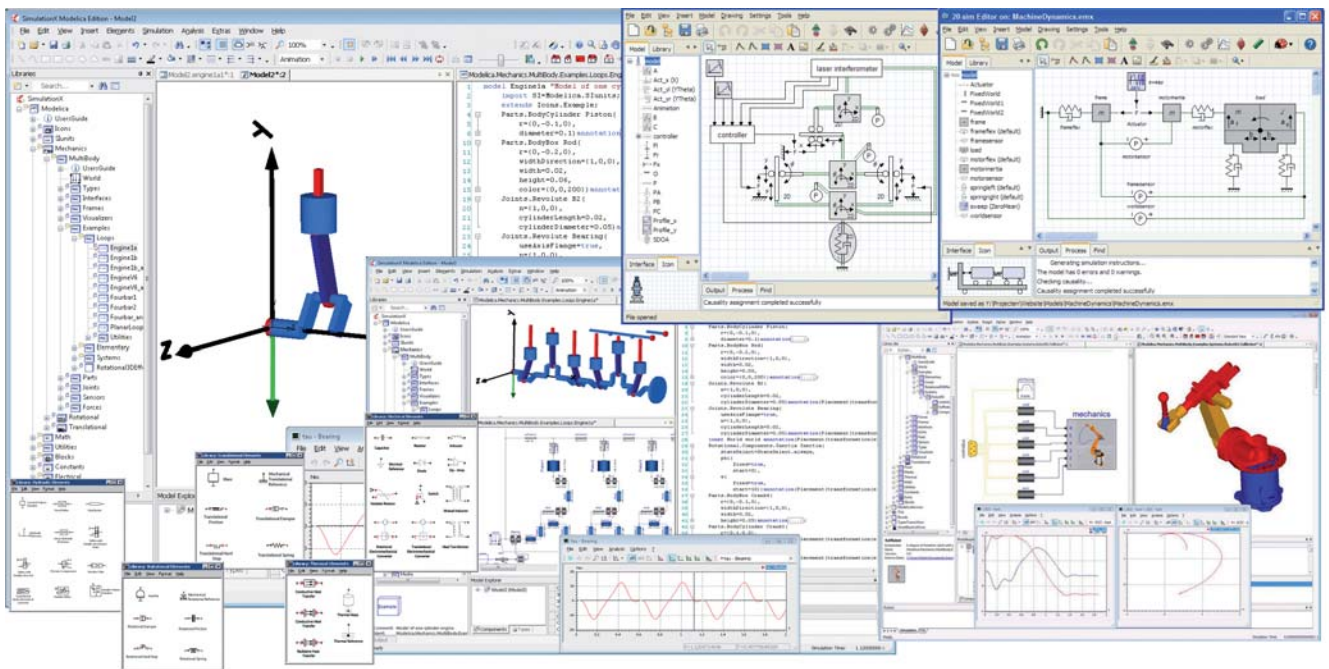


# Modellare sistemi complessi

Un approccio strutturato e una trattazione multifisica unificata sono alla base dei paradigmi di modellazione di sistemi complessi



Schermate dei programmi di modellazione e simulazione

L'integrazione di componenti e sistemi ascrivibili a differenti domini della fisica ha sempre giocato un ruolo fondamentale nella progettazione dei sistemi di automazione, a partire dal regolatore di Watt, un oggetto meccanico che modulava la potenza delle macchine a vapore, per arrivare alla più moderna mecatronica, dove è l'elettronica a controllare complessi sistemi elettromeccanici.

Questo approccio multidisciplinare ha messo in luce una trama comune nella descrizione dei sistemi dinamici, una comunanza dettata dalla generalità di principi di conservazione e continuità, che ha permesso di sviluppare una trattazione unificata dei sistemi meccanici, termodinamici, elettromagnetici, idraulici e pneumatici. L'interazione tra sistemi appartenenti a diversi domini fisici può essere rappresentata in termini di flussi di energia; adottando una metodologia di modellazione generalizzata diventa dunque possibile rappresentare in un unico contesto coerente i sistemi eterogenei più complessi. L'unificazione non è che un punto di partenza per un approccio modulare e strutturato alla modellazione, in particolare atto a essere implementato in sistemi di calcolo automatico.

Alla luce della trattazione unificata diventa possibile ricondurre le differenti tecniche di modellazione messe a punto nei rispettivi campi di applicazione a tre soli modi di interpretare l'interazione tra i componenti: passaggio unidirezionale di segnali (schemi a blocchi e funzioni di trasferimento), conservazione dell'energia (formulazione Lagrangiana e Hamiltoniana) e trasferimento di potenza (reti a porte e grafi delle relazioni).

## Dalle PDE alle DAE

Per capire quali siano le diverse forme di rappresentazione matematica di un sistema possiamo rimanere nell'ambito della meccanica. Nella loro descrizione più generale, i componenti di un sistema meccanico devono essere trattati come corpi deformabili e fluidi nell'ambito della meccanica dei continui. Le diverse proprietà del sistema sono distribuite in maniera continua per tutta la sua estensione. In questi casi, la descrizione matematica del sistema richiede equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE), per le quali, a meno di casi particolari, non esistono procedure di risoluzione esatta. La risoluzione numerica, solitamente effettuata ricorrendo al metodo degli elementi finiti (FEM) o a quello degli elementi al con-

torno (BEM), è un lavoro intensivo anche per i calcolatori più moderni. Nella maggioranza delle circostanze di ordine pratico è tuttavia possibile semplificare la descrizione matematica del sistema, attribuendone le proprietà essenziali (inerzia, elasticità e dissipazione di energia) a componenti distinti e ben localizzati. La modellazione a parametri concentrati rappresenta i sistemi meccanici come insiemi di corpi rigidi, caratterizzati da una propria inerzia alla traslazione e alla rotazione, di molle e smorzatori ideali e privi di massa. Matematicamente, queste idealizzazioni vengono descritte per mezzo di equazioni differenziali ordinarie (le equazioni di Newton e di Eulero), che risultano più facilmente gestibili delle loro controparti a derivate parziali. Alle equazioni che descrivono il comportamento dei vari elementi costituenti vanno poi aggiunte quelle che descrivono i vincoli che ne realizzano l'interconnessione e che limitano i gradi di libertà del sistema. Si ottiene così un sistema di equazioni algebrico-differenziali (DAE - Differential Algebraic Equations) che può essere sintetizzato in forma matriciale implicita con la seguente scrittura:

$$F(x', x, z, u, t) = 0$$

dove F esprime il legame (in generale non lineare) tra le variabili che descrivono lo stato del sistema e le rispettive derivate temporali (i vettori x e x'), le variabili 'algebriche' che rappresentano le altre grandezze vincolate (il vettore z), le sollecitazioni imposte sul sistema (il vettore u) e, ovviamente, il tempo (t). La struttura algebrico-differenziale può essere resa esplicita nel caso in cui i vincoli siano esprimibili in forma di sole equazioni algebriche, per esempio nel caso di vincoli olonomi scleronomi:

$$x' = f(x', x, z, u, t)$$

$$g(x, z, u) = 0$$

### Trattazione unificata

Per sistemi particolarmente semplici la determinazione del sistema di equazioni algebrico differenziali può essere portata a termine utilizzando procedimenti 'manuali': schemi a corpo libero, analisi cinematica e determinazione delle coordinate libere, scrittura delle equazioni di Newton ed Eulero, considerazione delle reazioni vincolari e delle forze interne. Per sistemi ragionevolmente complessi, o comprendenti componenti appartenenti a diversi domini della fisica, emerge la necessità di un approccio sistematico più consono a un'implementazione automatizzata al calcolatore.

Un primo passo in questa direzione arriva dall'introduzione di variabili generalizzate, che permettano di evidenziare la struttura comune delle interazioni energetiche tra i diversi domini fisici. L'esperienza ha mostrato che la modellazione dei sistemi dinamici di tipo meccanico, elettromagnetico, idraulico e pneumatico può essere descritta per mezzo di due coppie di variabili: due variabili cinematiche q e q', che rappresentano la posizione e la velocità generalizzate (quest'ultima indicata con la lettera f, dall'inglese 'flow', ossia 'flusso') e due variabili cinetiche p e p', rispettivamente momento e forza generalizzati

(designate dalla lettera e di 'effort', traducibile con il termine 'spinta'). A esclusione dei sistemi termici, per i quali manca il corrispettivo di una delle variabili cinetiche e il relativo elemento d'immagazzinamento dell'energia, la descrizione a parametri concentrati dei sistemi dinamici ha in comune la presenza di due elementi, che rappresentano l'immagazzinamento di energia (cinetica e potenziale) e di un elemento che ne descrive la dissipazione.

Il trasferimento di potenza tra i vari elementi può essere espresso come il prodotto delle variabili flusso (f=q') e spinta (e=p'), che per questo motivo prendono il nome di 'variabili potenza' (q e p, per contro sono denominate 'variabili energia'). L'immagazzinamento di energia richiede la definizione dei concetti di energia cinetica T ed energia potenziale U. È bene sottolineare che nel caso generale non lineare è necessario distinguere tra energia e co-energia, così definite:

$$T(f) = \int f(p) dp \quad T^*(p) = \int p(f) df$$

$$U(e) = \int e(q) dq \quad U^*(q) = \int q(e) de$$

Le relazioni costitutive che legano il flusso al momento generalizzato e la spinta alla posizione generalizzata definiscono le proprietà di inerzia I e capacità C degli elementi in grado di immagazzinare energia. La dissipazione di energia è rappresentata dal resistore generalizzato R, che lega tra loro le variabili di potenza che compaiono nell'integrale che definisce la funzione di dissipazione di Rayleigh D e la relativa co-funzione.

$$D(f) = \int e(f) df \quad D^*(e) = \int f(e) de$$

Le relazioni tra le variabili generalizzate sono schematizzate in figura 1, dove è rappresentato anche il collegamento tra le variabili q e p che nel dominio elettromagnetico definisce il memristore M.

L'introduzione delle variabili generalizzate permette di definire in maniera indipendente dal dominio fisico anche gli altri componenti di un sistema dinamico: generatori (indipendenti e controllati), trasformatori, giratori e, soprattutto, trasduttori, che fungono da ponte tra sottosistemi appartenenti a domini di diversa natura. Solo due delle quattro variabili generalizzate

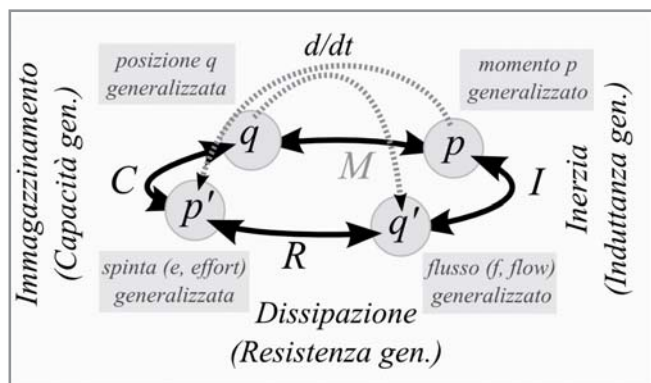
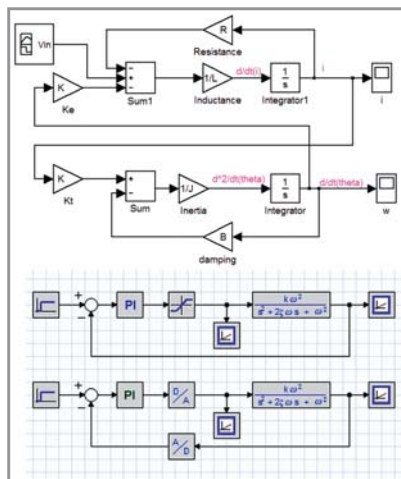


Figura 1 - Anello delle relazioni costitutive che legano le variabili generalizzate: capacità generalizzata C, inerzia I e resistenza generalizzata R

sono indipendenti e la scelta di quali utilizzare cambia a seconda della metodologia di modellazione adottata. Nell'approccio basato sul trasferimento unidirezionale di segnali (schemi a blocchi e funzioni di trasferimento) a passare tra un componente e l'altro è una sola variabile, il 'segnale', mentre la seconda variabile indipendente viene considerata influente. Nei metodi basati sulla conservazione dell'energia si utilizzano le variabili energia  $q$  e  $p$  (approccio Hamiltoniano), o le variabili cinetiche  $q$  e  $q' = \dot{q}$  (approccio Lagrangiano). Come facilmente intuibile, nei metodi basati sul trasferimento di potenza (reti a porte e bond graph) le variabili di elezione sono quelle di potenza:  $q'$  e  $p'$ .

### Flusso unidirezionale di segnali

L'approccio basato sui segnali è quello più semplice ed è riconducibile ai ben noti schemi a blocchi, ampiamente utilizzati nella teoria dei controlli automatici. Ogni blocco descrive il comportamento dinamico in termini di relazione tra i segnali in ingresso e in uscita. La ratio alla base di questo metodo è l'assenza di effetti di carico tra i vari blocchi che costituiscono il sistema. Si tratta di un assunto ragionevole, qualora lo scambio di informazioni tra due sottosistemi avvenga senza apprezzabile trasferimento di potenza. Dato che la potenza è il prodotto delle due variabili generalizzate  $f$  ed  $e$ , questo implica che una delle due sia approssimativamente nulla, mentre l'altra è il segnale che viene trasferito da un blocco all'altro. Nei sistemi elettrici questa condizione si verifica, per esempio, quando i blocchi comunicano per mezzo di segnali di tensione (spinta) e hanno un assorbimento di corrente (flusso) pressoché nullo. In assenza di effetti di carico diventa possibile realizzare sistemi complessi assemblando blocchi indipendenti, le cui caratteristiche d'ingresso e uscita non sono influenzate dagli altri blocchi che vi siano connessi. In questo senso, il trasferimento di informazioni è unidirezionale. Tutto questo rende particolarmente agevole creare librerie di componenti riutilizzabili, ma va tenuto presente che si tratta di un'idealizzazione spesso troppo spinta: nella pratica la tensione erogata da un generatore reale cambia al variare dell'impedenza del circuito che deve alimentare, allo stesso modo in cui la coppia erogata da un motore viene influenzata dall'inerzia del carico applicato. Per quanto convoluto, questo approccio viene comunemente utilizzato



**Figura 2 - La modellazione con blocchi monodirezionali permette di modellare le equazioni differenziali o le funzioni di trasferimento che descrivono la dinamica del sistema (esempi in Simulink e 20-Sim)**

per rappresentare le equazioni differenziali che descrivono un sistema dinamico in maniera da esplicitare gli operatori d'integrazione necessari alla risoluzione. È così possibile specificare caso per caso la procedura numerica più appropriata.

### Equazioni di Lagrange e Hamilton

I metodi basati sulla conservazione dell'energia offrono una descrizione completa del sistema utilizzando una coppia di variabili generalizzate e sono pertanto in grado di tenere conto di tutte le relazioni che si vengono a creare quando si connettono tra loro più sottosistemi. Quando si ha a che fare con sistemi meccanici, inoltre, la formulazione lagrangiana o hamiltoniana delle equazioni del moto offre due indubbi vantaggi sull'applicazione 'manuale' delle leggi della dinamica: non richiede l'introduzione e il calcolo delle forze interne e non necessita di particolari analisi oltre all'identificazione delle coordinate generalizzate indipendenti e degli elementi che contribuiscono all'immagazzinamento, alla dissipazione e alla generazione di energia. La scrittura delle equazioni di Lagrange utilizza le variabili generalizzate  $q$  e  $q'$  (dove  $q$  è il vettore delle coordinate libere indipendenti ricavate dall'analisi cinematica del sistema) e richiede la determinazione di tre grandezze scalari: la co-energia cinetica  $T^*$ , l'energia potenziale  $U$  e la funzione di dissipazione di Rayleigh  $D$ . Conoscendo il vettore  $e_s$  delle spinte generalizzate impresse sul sistema, si possono scrivere tante equazioni quante sono le coordinate indipendenti  $q_k$  nella forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^*}{\partial q'_k} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{\partial D}{\partial q'_k} + e_{sk}$$

o, equivalentemente, dopo aver introdotto la funzione lagrangiana  $L = T - U$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L^*}{\partial q'_k} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_k} = - \frac{\partial D}{\partial q'_k} + e_{sk}$$

Se si considerano tutte le coordinate generalizzate, per esempio perché si vogliono valutare le forze interne, oltre alle equazioni vincolari è necessario introdurre nelle equazioni di Lagrange un ulteriore termine, che è funzione di tanti parametri (i moltiplicatori di Lagrange) quanti sono i vincoli. Una formulazione alternativa, ma equivalente, alle equazioni di Lagrange è rappresentata dalle equazioni di Hamilton, che utilizzano come variabili i vettori posizione generalizzata  $q$  e flusso generalizzato  $q'$  e richiedono la determinazione di una grandezza scalare (la hamiltoniana  $H$ ) legata alla lagrangiana dalla trasformazione di Legendre:  $H = p q - L$

$$q'_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$p'_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k}$$

Sebbene inadatti alla risoluzione di sistemi molto complessi, gli approcci lagrangiano e hamiltoniano, proprio perché basati su un principio generale come quello della conservazione

dell'energia, si prestano in maniera naturale alla modellazione di sottosistemi multifisici quali sensori e trasduttori.

### Reti a porte e grafi

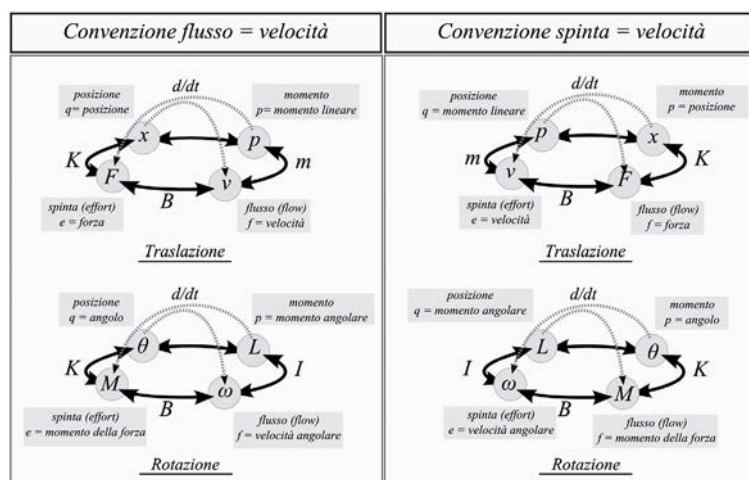
I metodi basati sul trasferimento di potenza permettono di ottenere rappresentazioni del sistema che mettono in evidenza le relazioni tra parti distinte e identificabili; si prestano alla realizzazione in strutture gerarchiche basate su librerie di componenti riutilizzabili e tengono automaticamente conto degli effetti di carico in accordo alla topologia di connessione.

Le reti a porte generalizzate sono una generalizzazione delle reti elettriche basate sulle leggi di Kirchhoff e possono contare su tutti i vantaggi di uno strumento di analisi e sintesi ampia-

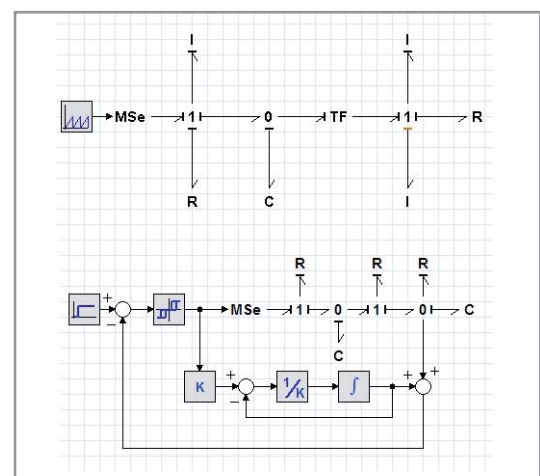
(o 1-variabili, o variabili di tipo 'through'). Le prime possono essere misurate tra due punti della rete e costituiscono una generalizzazione del potenziale elettrico; le per-variabili, invece, sono grandezze in transito, che possono essere misurate in un singolo punto della rete e generalizzano il concetto di corrente elettrica. È bene evidenziare come, nell'ambito delle reti a porte, i sistemi meccanici seguano in genere una convenzione diametralmente opposta a quella adottata dalla formulazione lagrangiana, come illustrato in figura 3.

Il motivo di questa scelta è che con la nuova convenzione si ha una corrispondenza più stretta tra le topologie dello schema meccanico e della corrispondente rete di Kirchhoff.

La tecnica dei Bond Graph, ossia dei grafi dei legami, rappre-

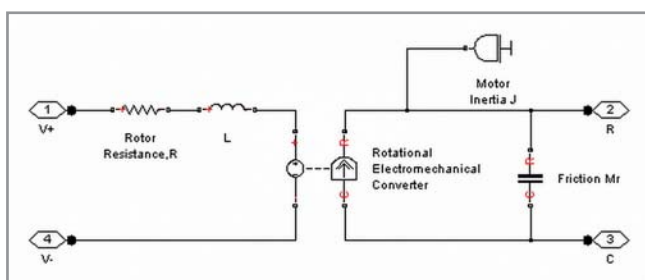


**Figura 3 - Differenza di convenzioni nell'attribuzione del ruolo di per-variabile e trans-variabili nell'approccio lagrangiano (p = momento lineare o angolare, f = velocità) e nelle reti a porte (p = spostamento lineare o angolare, e = velocità)**



**Figura 5 - La rappresentazione per mezzo di Bond Graph è molto potente e può essere integrata con ordinari schemi a blocchi, ma produce schemi di scarsa leggibilità per un profano (immagini tratte da 20-Sim)**

mente rodato, perfezionato e dotato di numerose implementazioni al computer. Gli elementi a parametri concentrati sono rappresentati da blocchi, che scambiano potenza con gli altri elementi attraverso coppie di terminali (porte). Le variabili generalizzate spinta e flusso, che descrivono la potenza in transito attraverso una porta, assumono il significato di trans-variabili (o 2-variabili o variabili di tipo 'across') e per-variabili



**Figura 4 - La modellazione con reti a porte si basa sul trasferimento di potenza e ha il vantaggio di utilizzare rappresentazioni grafiche che si avvicinano alla disposizione dei componenti del sistema reale (schermata di Simscape)**

senta un ulteriore passo avanti in termini di interdisciplinarietà della modellazione. Introdotta negli anni '60 e rivalutata con l'avvento della mecatronica e dei Mems, questa metodologia modella i sistemi dinamici per mezzo di linee che descrivono i legami di potenza in essere tra le sue parti. Una semifreccia indica la direzione positiva del flusso di potenza; le due variabili generalizzate, spinta e flusso, sono riportate rispettivamente sopra e sotto la freccia, mentre una stanghetta identifica la variabile d'ingresso. Le connessioni sono rappresentate da numeri: uno 0 rappresenta un parallelo, mentre un 1 un collegamento in serie. La tecnica BG si presta bene all'implementazione al computer, ma ha il difetto di essere poco comprensibile ai non addetti ai lavori. La variante di successiva introduzione, detta Power Oriented Graph (POG), ha una rappresentazione più vicina all'effettiva implementazione fisica del sistema modellato. Qui, i vari moduli che costituiscono il sistema sono dei blocchi che possono essere di due tipi: blocchi di elaborazione, che accumulano o dissipano energia, e blocchi di connessione, che la trasformano da una forma all'altra. A differenza dei BG e analogamente alle reti a porte adottano la convenzione flusso = momento, così da offrire una corrispondenza immutata nella connessione serie e parallelo degli elementi di accumulo.